機械力学1講義

第9回

2006.12.18

（前半・中間試験，後半・講義）

7章　ラグランジュの方程式

教科書　p.123

　回転と並進が混在する系では，力の釣合いから運動方程式を導くのが難しい．そのような系では，エネルギ保存則の利用が有効である．エネルギはスカラー量のため向きを考えなくてよく，また，静止摩擦のように仕事をしない力は考慮しなくてよいからである．

　しかし，エネルギ保存則d(T+U)/dt=0は，１自由度系の自由振動でしか使えない．なぜなら，強制振動ではエネルギが保存されず，また，エネルギ保存則からは1つの式しか導かれないからである．

　これに対して，強制振動や２自由度系にも適用できる方法がラグランジュの方程式である．ラグランジュの方程式は，どのような座標系で記述しても同じ形になるという特徴があり，さらに，電気回路を含む系にも適用できるという強力な解析手法である．

7.1　直角座標におけるラグランジュの方程式

ニュートンの運動方程式

$$\boxed{m\ddot{x}} = \boxed{f}$$

保存力，重力，ばね力

f＝Uによるもの＋その他の力F

$$\boxed{f} = -\frac{\partial U}{\partial x} + F$$

重力 $U = mgx$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -mg$$

ばね $U = \frac{1}{2}kx^2$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

慣性力を運動エネルギT により表現

$$\boxed{m\ddot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)$$

運動方程式のエネルギによる表現

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} + F$$

エネルギ保存則 $\frac{d}{dt}(T + U) = 0$

運動方程式のエネルギによる表現

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}}\right)=-\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}}+F$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U=mgx$$

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

ラグランジュ関数

$$L=T-U$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x}}=\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}=-\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}=\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}}$$

Tは x **を含まない**

Uは $\dot{x}$ **を含まない**

(ただし x とx'を独立とみなす)

ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F$$

運動方程式をL=T-Uで表したもの何がうれしいかは，後で分かる．

ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \qquad L = T - U$$

形式上，x と $\dot{x}$ は独立変数

$\partial / \partial x$ では $\dot{x}$ は定数

$\partial / \partial \dot{x}$ では x は定数

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$$ の前提条件

7.2　2次元極座標におけるラグランジュの方程式
7.2.1　ニュートンの方程式の極座標表示

回転運動では，ニュートンの方程式においても極座標表示の方が便利であり，ラグランジュの方程式を用いるとさらにそれが簡略化される．本項では，ラグランジュの方程式導出の前段階として，極座標におけるニュートンの方程式を導く．

（中略）

実際の振動問題を解く立場からは，本項と次項を読まなくても差し支えなく，簡便に学習したい人は7.3節へ飛んでよい．

7.3　種々の運動におけるラグランジュの方程式

教科書p.130

直線運動　$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F$$

(a) 保存系

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$L=T-U$

q：一般座標．x，y，r，θ など

(b) 外力が働く場合

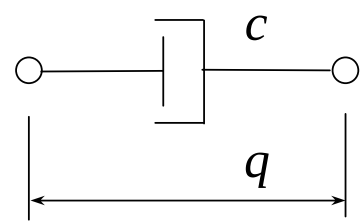
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=Q$$

並進：Qは力

回転：Qはモーメント

(c) 減衰がある場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=Q$$



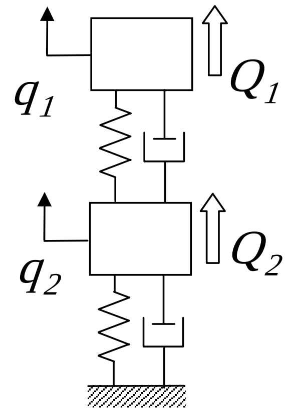
$$D=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$$

D：散逸関数

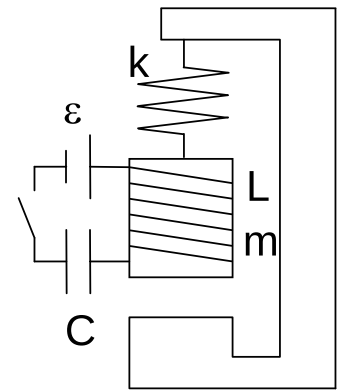
種々の運動におけるラグランジュの方程式

(d) 多自由度系

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_r}=Q_r \qquad r=1\sim N$$



(e) 電気回路を含む場合



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F$$

$$L=T-U+W_m-W_e$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\varepsilon$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$ 磁界のエネルギ

$$W_e=\frac{1}{2}CV^2$$ 電界のエネルギ

q：電荷　　ε：電源電圧

7.4　ラグランジュの方程式を用いた振動計算

ラグランジュの方程式は，実際上は導出よりも利用できることが重要である．代表的な例題をといて，利用方法を学習する．

ニュートンの方程式でも簡単に解ける例題

7.4.1　単振子
7.4.2　減衰がある場合の強制振動

ニュートンの方程式では難しい例題

7.4.3　台車と振子
7.4.4　回転する棒上の質点
7.4.5　摩擦のある棒上の質点
7.4.6　弾性支持されたモータとおもり
7.4.7　回転するリング上の質点
7.4.8　梁の2自由度近似

7.4.1 **単振子**　**外力は重力のみ＝ポテンシャル力＝保存系**

(a)保存系の公式を使用

p.131　**式**7.43

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad L=T-U$$

q：一般座標．x，y，r，θ など

自由度は回転角θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$$

$$U=mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

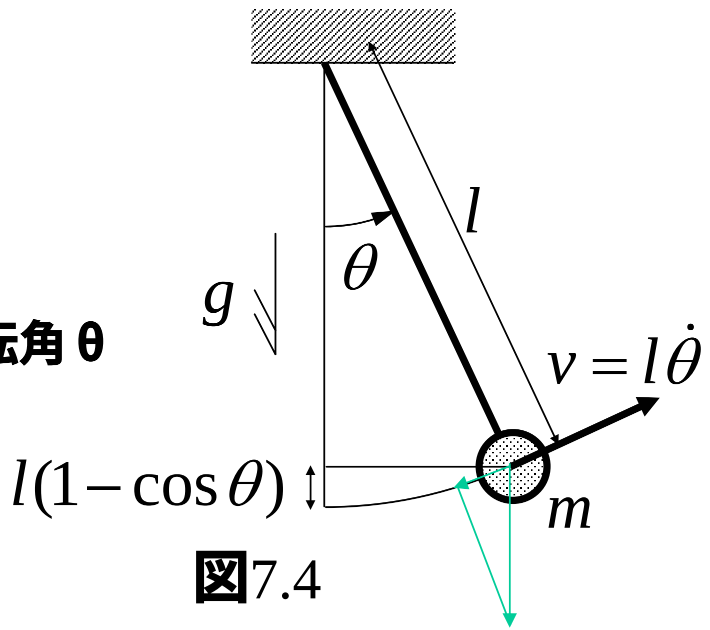


図7.4

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)} - \boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 0$$

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$$

$$U = mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

第1項

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) = ml^2\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)} = \boxed{ml^2\ddot{\theta}}$$

θとθ’は独立とみなす

第2項

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = \cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial \theta}} - \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[mgl\left(1 - \cos\theta\right)\right]$$

$$= \boxed{-mgl\sin\theta}$$

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta}} + \boxed{mgl\sin\theta} = 0$$

θ <<1により線形化

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

7.4.2 減衰がある場合の強制振動　(c) の公式を使用

$$L = T - U$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)} - \boxed{\frac{\partial L}{\partial x}} + \boxed{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}} = f$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad D = \frac{1}{2} c\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

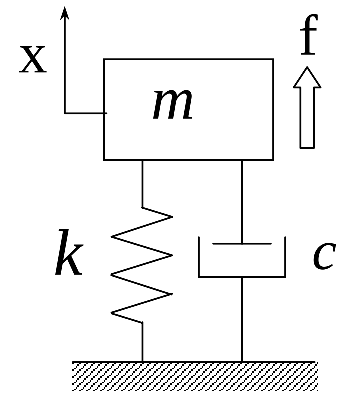


図7.5

第1項

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2\right) = m\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)} = \boxed{m\ddot{x}}$$

第2項 $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x}} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} kx^2\right] = \boxed{-kx}$$

第3項 $$\boxed{\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2} c\dot{x}^2\right) = \boxed{c\dot{x}}$$

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = f$$

2.4.5　平面を転がる円柱

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$x = r\theta$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2} \qquad \boxed{T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2} \qquad \boxed{U = \frac{1}{2}kr^2\theta^2}$$

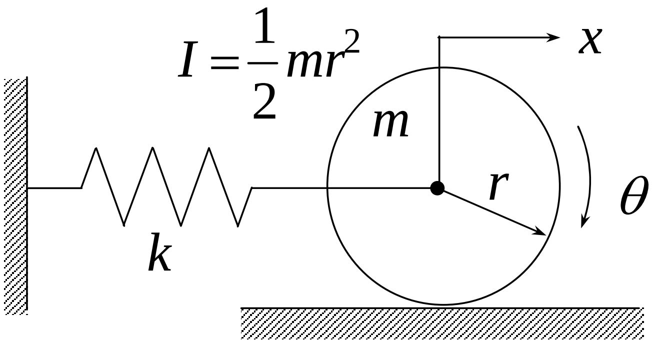


図2.18　転がり振動する円板

エネルギ保存則

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0$$

ラグランジュの方程式

$$\boxed{L = T - U}$$

(a) **保存系**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

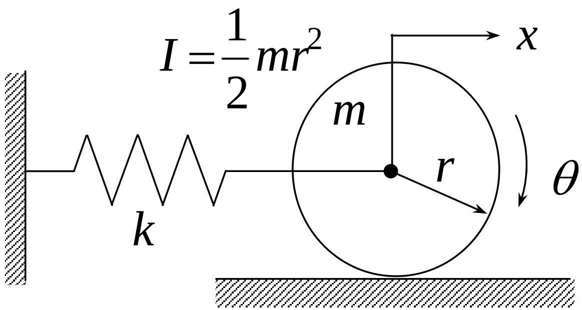
自由度
q=x

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

自由度
q= **θ**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0}$$

自由度q=xとするとき



$$T=\frac{3}{4}m\dot{x}^2 \qquad U=\frac{1}{2}kx^2$$

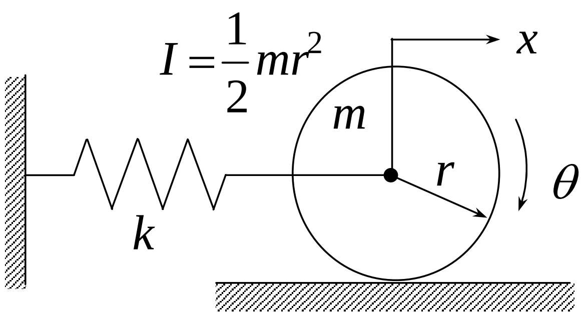
$$L=T-U \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}-\boxed{\frac{\partial L}{\partial x}}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}^2\right)=\frac{3}{2}m\dot{x} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}=\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x}}=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}kx^2\right]=\boxed{-kx}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx=0 \qquad (2.86)$$

自由度q= θ とするとき



$$T=\frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 \qquad U=\frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

$$L=T-U \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}-\boxed{\frac{\partial L}{\partial\theta}}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)}=\boxed{\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial\theta}}=-\frac{\partial U}{\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}kr^2\theta^2\right]=\boxed{-kr^2\theta}$$

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}+kr^2\theta=0 \qquad \frac{3}{2}m\ddot{\theta}+k\theta=0$$

$x=r\theta$ **とおけば** $\frac{3}{2}m\ddot{x}+kx=0$

講義予定

12/18（月）中間試験＋講義
1/ 9 （火） 13:00から
1/15 （月） 休講
1/22（月） 講義
1/29（月） 予備
3/ 5 （月） 最終試験